Vícečlenné kinematické řetězce
(šesti-, osmi-, desetičlenné-)

Zpracoval: Jiří Mrázek, Martin Bílek

Pracoviště: Technická univerzita v Liberci
katedra textilních a jednoúčelových strojů

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

In-TECH2

Tento materiál vznikl jako součást projektu In-TECH 2, který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

In-TECH 2, označuje společný projekt Technické univerzity v Liberci a jejích partnerů - Škoda Auto a.s. a Denso Manufacturing Czech s.r.o.

Cílem projektu, který je v rámci **Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost (OP VK)** financován prostřednictvím MŠMT z Evropského sociálního fondu (ESF) a ze státního rozpočtu ČR, je inovace studijního programu ve smyslu progresivních metod řízení inovačního procesu se zaměřením na rozvoj tvůrčího potenciálu studentů.

Tento projekt je nutné realizovat zejména proto, že na trhu dochází ke zrychlování inovačního cyklu a zkvalitnění jeho výstupů. ČR nemůže na tyto změny reagovat bez osvojení nejnovějších inženýrských metod v oblasti inovativního a kreativního konstrukčního řešení strojírenských výrobků.

Majoritní cílovou skupinou jsou studenti oborů Inovační inženýrství a Konstrukce strojů a zařízení. Cíle budou dosaženy inovací VŠ přednášek a seminářů, vytvořením nových učebních pomůcek a realizací studentských projektů podporovaných experty z partnerských průmyslových podniků.

Délka projektu: 1.6.2009 – 31.5. 2012

1. TEORIE SLOŽENÍ MECHANISMŮ

Mechanismem nazýváme každou soustavu navzájem pohyblivě spojených těles. Jednotlivá tělesa nazýváme členy mechanismu. Členy mechanismu mohou být tělesa dokonale tuhá (lze zanedbat deformace od působících sil), pružná, tj. tělesa s omezenou tuhostí, ohebná jako lana, dráty, řetězy, provazy, řemeny. Členem mechanismu může být rovněž kapalina nebo plyn. Prvky spojení dvou sousedních členů mechanismu nazýváme kinetickou dvojicí.

Kinetické dvojice třídíme podle:

a) charakteru relativního pohybu,
b) uspořádání styku těles,
c) druhu vedení,
d) vlastností relativního pohybu při záměně základního tělesa

a) Charakter relativního pohybu

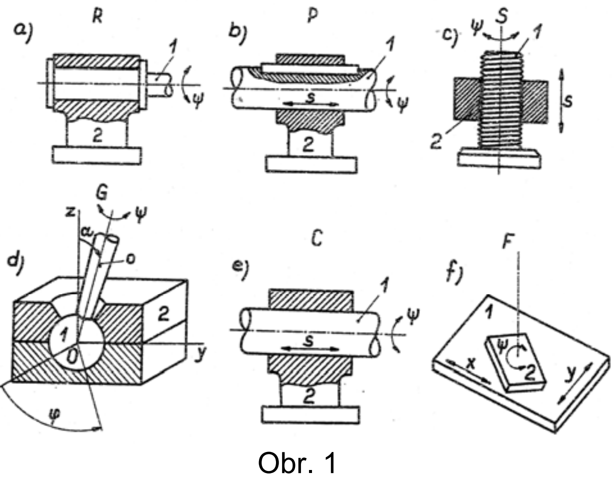
Relativní pohyblivost tělesa jako členu mechanismu omezujeme tím, že jej vážeme k základnímu tělesu (členu mechanismu) podle jistých vazbových podmínek. Stupněm pohyblivosti (volnosti) máme na mysli počet na sobě nezávislých souřadnic, nutných k určení tělesa v prostoru. Počet takových souřadnic je shodný s počtem na sobě nezávislých dílčích pohybů, ve které lze pohyb tělesa rozložit (stupeň volnosti označujeme písmenem i). Volnému tělesu v prostoru přísluší šest stupňů pohyblivosti, a to tři nezávislé posuvy ve směrech souřadnicových os zvoleného pravoúhlého souřadnicového systému a tři nezávislé rotace kolem týchž os. Relativní pohyblivost vzhledem ke zvolenému základnímu tělesu omezujeme vazbami (geometrickými nebo silovými). Označíme-li počet vazeb m, platí pro těleso v prostoru vazbová závislost

$$i + m = 6 \qquad (m \leq 6)$$

Z uvedeného hlediska se dělí kinematická dvojice podle pohyblivosti i, kterou připouští v relativním pohybu. Mluvíme o třídě kinematické dvojice. Kinematická dvojice 1.třídy připouští jeden stupeň pohyblivosti; kinematická dvojice 5.třídy pět stupňů pohyblivosti.

Základní skupinu kinematických dvojic tvoří tzv. nižší dvojice:

R	rotační	(Revolute pair)	i=1	(a)
P	posuvná	(Prismatic pair)	i=1	(b)
S	šroubová	(Screw pair)	i=1	(c)
G	sférická	(Spheric pair)	i=3	(d)
C	válcová	(Cylinder pair)	i=2	(a)
F	plošná	(Planar pair)	i=3	(f)



Obr. 1

Na obr. 1 jsou uvedeny případy uspořádání základních kinematických dvojic R, P, S, G, C, F.

a) Relativní pohyb je rotační pohyb kolem osy čepu definovaný souřadnicí ***ψ***.

b) Relativní pohyb je posuvný ve směru osy čepu definovaný souřadnicí ***s***.

c) Relativní pohyb je šroubový definovaný souřadnicí ***ψ*** rotačního pohybu kolem osy šroubu nebo souřadnicí ***s*** posuvného pohybu ve směru osy šroubu. Souřadnice ***ψ, h*** a ***s*** jsou vázány vztahem $\Delta s = h\frac{\Delta\psi}{2\pi}$, kde ***h*** je zdvih šroubu při jedné otáčce.

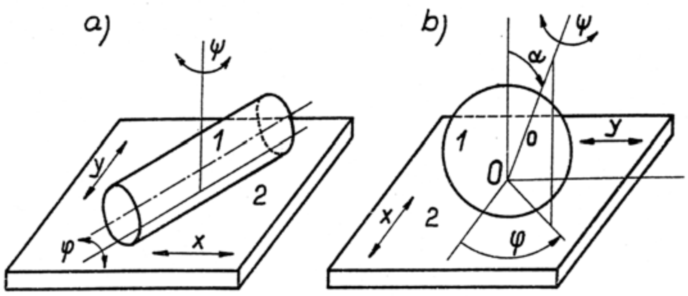
d) Relativní pohyb je sférický definovaný třemi souřadnicemi: dvě souřadnice ***α***, ***φ*** určují směr osy ***o*** rotace a souřadnice ***ψ*** rotaci kolem osy ***o***.

e) Relativní pohyb je kombinace rotačního pohybu kolem osy válce a posuvného ve směru osy válce; příslušné souřadnice jsou ***ψ***, ***s***.

f) Relativní pohyb je složený ze dvou posuvů ***x***, ***y*** a rotace ***ψ*** kolem osy kolmé na rovinu pohybu.

b) Uspořádání styku tělesa

V ideálním případě, neuvažujeme-li deformaci těles, je styk v bodě, křivce nebo ploše. Z hlediska měrných tlaků je nejvýhodnější plošný styk. Kinematické dvojice na obr. 1 realizují plošný styk. V případě vazby tělesa k základnímu tělesu přímkovou dvojicí, dochází ke styku obou těles v přímce / površce válce). Jedná se o kinematickou dvojici 4. třídy; i=4 (obr.2a). K vazbě s bodovým stykem dochází u bodové kinematické dvojice, která přísluší do 5. třídy; i=5 (obr. 2b). V obou případech vylučujeme případ valivého pohybu. Kinematické dvojice, u nichž se sousední členy stýkají v křivce nebo v bodě nazýváme vyšší kinematické dvojice.



Obr. 2

c) Druh vedení

Těleso může být v relativním pohybu z hlediska geometrického vedeno jednostranně nebo dvoustranně. Případ jednostranného vedení představuje plošné kinematické dvojice v uspořádání podle obr.1f. Konstrukčně lze snadno zajistit i v tomto případě oboustranné vedení. Při oboustranném vedení hovoříme o nuceném styku a při jednostranném vedení o silovém okruhu.

d) Vlastnosti relativního pohybu při záměně základního tělesa

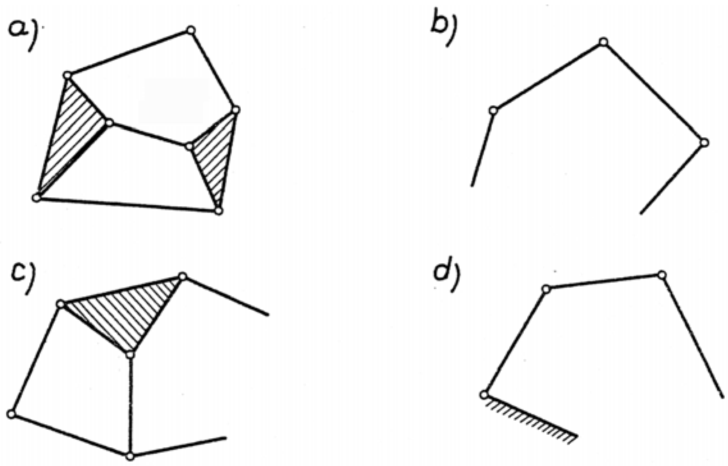
V případě podle obr. 1 jsme sledovali relativní pohyb tělesa 1 vzhledem k tělesu 2. Relativní pohyb tělesa 2 vzhledem k tělesu 1 nazýváme reciprokým pohybem. Nedojde-li při záměně základního tělesa ke změně charakteru drah (trajektorií) tělesa, mluvíme o reciproké kinematické dvojici. Mezi kinematické dvojice této vlastnosti patří všechny kinematické dvojice s plošným stykem; tedy i nižší kinematické dvojice podle obr.1.

Kinematické řetězce

Spojením několika těles kinematickými dvojicemi získáme tzv. kinematický řetězec. Každé těleso řetězce nazýváme člen nebo článek řetězce. Kinematické řetězce dělíme podle uspořádání na:

a) uzavřené nebo otevřené,
b) jednoduché nebo složené
c) volné nebo vázané
d) rovinné nebo prostorové

Uzavřený je takový kinematický řetězec, u něhož je každý člen vázán nejméně dvěma kinematickými dvojicemi s ostatními členy. V otevřeném kinematickém řetězci existují rovněž členy s jednou kinematickou dvojicí. Uzavřený kinematický řetězec je naznačen na obr. 3a; otevřený pak na obr.3b. Charakteristickým znakem uzavřených kinematických řetězců jsou uzavřené mnohoúhelníky (polygony), z nichž je řetězec vytvořen.



Obr. 3

Řetězec na obr.3a obsahuje jeden čtyřúhelník a jeden pětiúhelník; pokud neuvažujeme polygony tvarově neproměnné, které představují členy řetězce (šrafované trojúhelníky). V případě, že kinematický řetězec je vytvořen jak uzavřenými, tak i otevřenými polygony, mluvíme o kombinovaném řetězci (obr.3c).

Existuje-li v kinematickém řetězci alespoň jeden člen, který je spojen v řetězci s větším počtem kinematických dvojic než dvě, mluvíme o složeném kinematickém řetězci (obr. 3a,c). Kroužky symbolicky vyjadřují nižší kinematické dvojice typu R nebo P.

Kinematický řetězec, u něhož není žádný člen součástí nehybného rámu, nazýváme volný kinematický řetězec; v opačném případě vázaný kinematický řetězec (obr. 3d).

Kinematické řetězce dělíme na rovinné nebo prostorové podle toho, jsou-li trajektorie bodů při relativním pohybu dvou členů křivky rovinné nebo prostorové.

Grüblerova-Čebyševova vazbová závislost

Mějme rovinný, volný a uzavřený kinematický řetězec s nižšimi kinematickými dvojicemi o ***n*** geometricky neproměnných členech. Nechť řetězec obsahuje $\boldsymbol{n_2}$ členů s dvěma elementy kinematických dvojic (binárních členů), $\boldsymbol{n_3}$ členů s třemi elementy kinematických dvojic (ternárních členů), $\boldsymbol{n_4}$ členů se čtyřmi elementy kinematických dvojic (kvaternárních členů),ni počet členů s ***i*** elementy.

Počet ***n*** členů kinematického řetězce je

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots\dots\dots + n_i = \sum_2^i n_i \tag{1.1}$$

Je-li ***j*** počet nižších kinematických dvojic v řetězci, pak celkový počet ***e*** elementů kinematických dvojic je

$$e = 2j \tag{1.2}$$

neboť každé kinematické dvojici přísluší dva elementy. Celkový počet elementů v řetězci je určen vztahem

$$e = 2j = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots\dots\dots + in_i = \sum_2^i in_i \tag{1.3}$$

Předpokládejme v dalším, že řetězec obsahuje vesměs rotační kinematické dvojice. Binárnímu členu řetězce přísluší jedna podmínka tuhosti (stálá vzdálenost středu obou kloubů), ternárnímu členu přísluší tři podmínky tuhosti (stálé vzdálenosti středů tří kloubů). Obecně přísluší členu řetězec s ***i*** elementy 2i – 3 podmínek tuhosti tvaru

$$(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = \overline{MN}^2 \tag{1.4}$$

Kde ***M,N*** značí dva z ***i*** elementů a $\boldsymbol{x_N}$, $\boldsymbol{y_N}$, $\boldsymbol{x_M}$, $\boldsymbol{y_M}$ pak pravoúhlé souřadnice těchto bodů vzhledem k souřadnicovému systému $\boldsymbol{O_{xy}}$.

Obsahuje-li kinematický řetězec $\boldsymbol{n_i}$ členů s ***i*** elementy je celkový počet podmínek tuhosti roven

$$(2i - 3)n_i$$

celému kinematickému řetězci pak přísluší počet podmínek tuhosti dle rovnice 1.5.

$$\sum_2^i (2i - 3)n_i \tag{1.5}$$

Podmínkám tuhosti (1.5) musí vyhovovat všechny možné (virtuální)pohyby, které lze kinematickému řetězci udělit. Volný střed kloubu má dva stupně volnosti, ***j*** kloubů, ***2j*** stupňů volnosti. Mezi ***2j*** virtuální pohyby $\boldsymbol{\delta_X}$, $\boldsymbol{\delta_Y}$ musí být splněno $\sum_2^i (2i-3)n_i$ rovnic tvaru

$$(x_M - x_N)(\delta_{XM} - \delta_{XN}) + (y_M - y_N)(\delta_{YM} - \delta_{YN}) = 0 \tag{1.6}$$

Kde $\boldsymbol{\delta_{XM}}$, $\boldsymbol{\delta_{YM}}$, $\boldsymbol{\delta_{XN}}$, $\boldsymbol{\delta_{YN}}$ jsou virtuální posuvy bodů ***M, N*** ve směrech od ***x, y***. Rovnice (1.6) plyne z podmínky tuhosti úsečky ***M N*** bodů ***M´*** ($\boldsymbol{x_M + \delta_{XM}}$, $\boldsymbol{y_M + \delta_{YM}}$), ***N´*** ($\boldsymbol{x_N + \delta_{XN}}$, $\boldsymbol{y_N + \delta_{YN}}$), u níž položíme ***M´N´ = MN*** podle vztahu (1.4) a zanedbáme členy $(\boldsymbol{\delta_{XM} - \delta_{XN}})^2$, $(\boldsymbol{\delta_{YM} - \delta_{YN}})^2$.

Mějme na mysli kinematický řetězec, u něhož pohyblivost všech středů klubů vzhledem k zvolenému nehybnému členu kinematického řetězce je zcela určitá. Takový řetězec nazýváme kinematický řetězec nuceného pohybu [1]. Pak volbou čtyř z celkového počtu ***2j*** posuvů $\boldsymbol{\delta_X}$, $\boldsymbol{\delta_Y}$ jsou všechny ostatní, tj. ***2j – 4*** posuvů určeno z rovnic (1.6).

---

[1] V německé literatuře Zwanglauf, v anglosaské Constrained motion

Tudíž platí

$$\sum_{2}^{i}(2i-3)n_i = 2j-4 \qquad (1.7)$$

Srovnáním rozepsané levé strany vztahu (1.7) se vztahy (1.7) a (1.3) máme

$$2e-3n = 2j-4$$

Neboli

$$4j-3n = 2j-4$$

A odtud

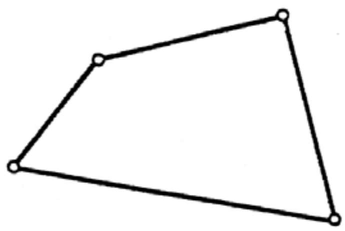
$$3n-2j-4 = 0 \qquad (1.8)$$

Což je Grüblerova-Čebyševova závislost, pro uzavřený kinematický řetězec nuceného pohybu o ***n*** členech a ***j*** rotačních kinematických dvojicích. Grüblerova závislost nám umožní sledovat některé strukturální otázky kinematických řetězců.

Ze vztahu (1,8) plyne

$$j = \frac{3n-4}{2} \qquad (1.9)$$

Aby ***j*** bylo celé číslo, musí ***3n - 4*** být číslo sudé, tedy i počet členů řetězce je vždy sudý. Ježto minimální počet členů je čtyři a počet kinematických dvojic rovněž čtyři, bude základní řetězec s nuceným pohybem čtyřčlenný kloubový, jednoduchý a uzavřený řetězec (obr.4).



Obr. 4

Kinematický řetězec nuceného pohybu pro ***n > 4*** musí obsahovat i složitější členy (ternární, kvaternární atd.). K určení počtu ***n*** binárních členů v kinematickém řetězci vyjdeme ze vztahu (1.8), v němž položíme

$$3n = 3n_2 + 3n_3 + 3\sum_{4}^{i} n_i$$

$$2j = 2n_2 + 3n_3 + \sum_{4}^{i} in_i$$

Čímž obdržíme

$$3n_2 + 3n_3 + 3\sum_{4}^{i} n_i - 2n_2 - 3n_3 - \sum_{4}^{i} in_i = 4$$

Z čehož plyne

$$n_2 = 4 + \sum_{4}^{i}(i-3)n_i \qquad (1.10)$$

Počet binárních členů v uzavřeném kinematickém řetězci nuceného pohybu je nezávislý na počtu ternárních členů.

Dále si dokážeme, že počet kinematických elementů ***i*** jednoho členu uzavřeného kinematického řetězce s nuceným pohybem je nejvýše roven ***n/2***.

Obsahuje-li řetězec členy binární, ternární a jen jediný člen s větším počtem elementů než 3, plyne počet ***i*** elementů takového členu ze vztahu (1.10)

$$i = n_2 - 1$$

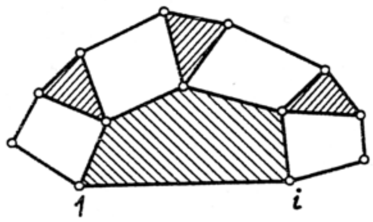
Počet členů takového mechanismu je pak

$$n = n_2 + n_3 + 1$$

tedy

$$i = n - n_3 - 2$$

Ježto k členu o ***i*** elementech mohu připojit ***i - 2*** ternárních členů (obr.5),



Obr. 5

platí

$$i = n_3 + 2$$

tedy

$$i_{\max} = \frac{n}{2} \tag{1.11}$$

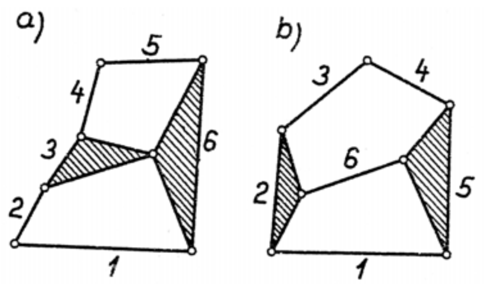
Šestičlenný kinematický řetězec

Podle vztahu (1.11) nemůže šestičlenný řetězec obsahovat člen s větším počtem elementů než 3.

K určení počtu členů $\boldsymbol{n_2}$ a $\boldsymbol{n_3}$ vycházíme ze vztahů (1.1), (1.3) a (1.9), tj. z vazbových rovnic

$$n_2 + n_3 = 6$$
$$2n_2 + 3n_3 = 2j = 14$$

Z nichž plyne $\boldsymbol{n_2=4}$, $\boldsymbol{n_3=2}$. podle uspořádání ternárních členů máme dvě varianty šestičlenného kinematického řetězce.



Obr. 6

Řetězec, u něhož jsou oba ternární členy sousedními nazýváme Wattův (obr. 6a), v opačném případě Stephensonův (obr. 6b).

Osmičlenný kinematický řetězec

Podle vztahu (1.11) nemůže osmičlenný řetězec obsahovat člen s větším počtem elementů než 4. Vztahy (1.1) a (1.3) mají v tomto případě tvary

$$n_2 + n_3 + n_4 = n$$
$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 2j$$

Pro ***n* = 8** je ze vztahu (1.9) ***2j* = 20** , dostaneme tedy dvě vazbové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} n_2 + n_3 + n_4 &= 8 \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 20 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Soustavu (1.12) tvoří dvě lineární nehomogenní rovnice pro tři neznámé. Soustavu upravíme

$$n_3 + n_4 = 8 - n_2$$
$$3n_3 + 4n_4 = 20 - 2n_2$$

Řešení soustavy

$$n_3 = \begin{vmatrix} 8 - n_2 & 1 \\ 20 - 2n_2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2n_2 \tag{1.13}$$

$$n_4 = \begin{vmatrix} 1 & 8 - n_2 \\ 3 & 20 - n_2 \end{vmatrix} = -4 + n_2 \tag{1.14}$$

Ježto čísla $\boldsymbol{n_2}$, $\boldsymbol{n_3}$, $\boldsymbol{n_4}$ mohou nabývat jen kladných celých hodnot, musí být při volbě proměnné $\boldsymbol{n_2}$ splněno

$$6 \geq n_2 \geq 4 \tag{1.15}$$

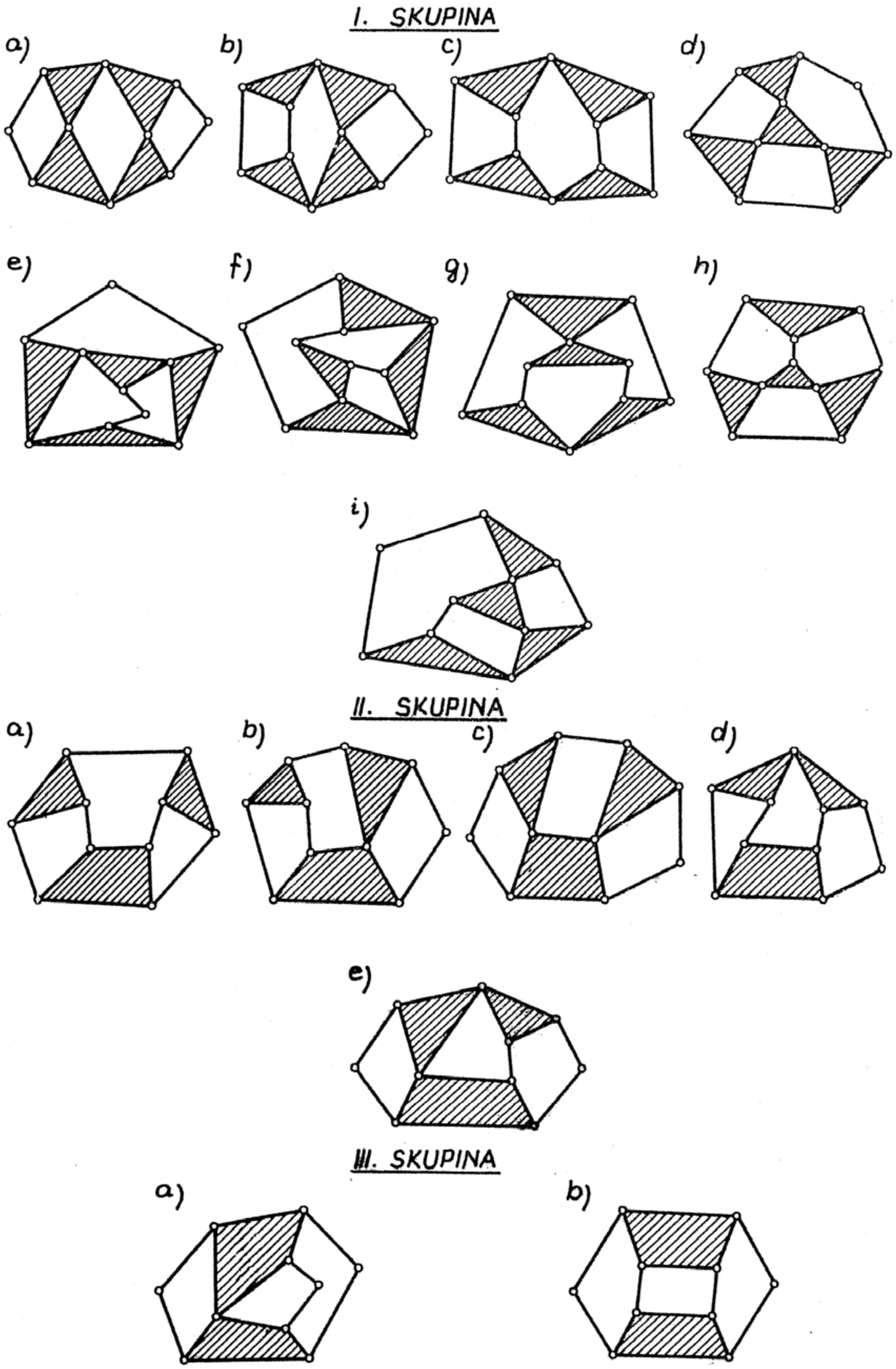
Podmínce (1.15) vyhovují pro $\boldsymbol{n_2}$ čísla 4, 5, 6. Podle počtu $\boldsymbol{n_2}$ binárních členů existují tedy tři skupiny uspořádání osmičlenných kinematických řetězců (viz.tabulka 1).

Tabulka 1

$\boldsymbol{n_2}$	$\boldsymbol{n_3}$	$\boldsymbol{n_4}$
4	4	0
5	2	1
6	2	2

První skupina typu 4 - 4 - 0 je složena z devíti variant. Druhá skupina typu 5 - 2 - 1 je složena z pěti variant a třetí skupina typu 6 - 0 - 2 pak ze dvou variant.

Jednotlivé skupiny a varianty uspořádání osmičlenných kinematických řetězců jsou uvedeny na obr.7.



Obr. 7

Desetičlenný kinematický řetězec

Podle vztahu (1.11) nemůže desetičlenný řetězec obsahovat člen s větším počtem elementů než 5. Pro ***n = 10*** je ***2j = 26.*** Vazbové rovnice jsou:

$$\begin{aligned} n_2 + n_3 + n_4 + n_5 &= 10 \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 &= 26 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Soustavu (1.16) tvoří dvě lineární nehomogenní rovnice pro čtyři neznámé.

Soustavu upravíme

$$\begin{aligned} n_2 + n_3 &= 10 - n_4 - n_5 \\ 2n_2 + 3n_3 &= 26 - 4n_4 - 5n_5 \end{aligned}$$

Řešení soustavy

$$n_2 = \begin{vmatrix} 10 - n_4 - n_5 & 1 \\ 26 - 4n_4 - 5n_5 & 3 \end{vmatrix} = 4 + n_4 + 2n_5 \tag{1.17}$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} 1 & 10 - n_4 - n_5 \\ 2 & 26 - 4n_4 - 5n_5 \end{vmatrix} = 6 - 2n_4 - 3n_5 \tag{1.18}$$

Ježto proměnné mohou nabývat jen kladných celých čísel, musí být při volbě proměnných n_4, n_5 splněna podmínka

$$2n_4 + 3n_5 \le 6 \tag{1.19}$$

Podmínku (1.19) splňují volby proměnných n_4, n_5 dle tab. 2.

Tabulka 2

n_5	0	1	2	0	1	0	0
n_4	0	0	0	1	1	2	3

Existuje celkem sedm skupin desetičlenných kinematických řetězců, z nichž lze vytvořit další varianty. Obdobně bychom postupovali při vytváření skupin řetězců s větším počtem členů než 10. Uvedené varianty jsou shrnuty v tab. 3

Tabulka 3

	I	II	III	IV	V	VI	VII
n_5	0	1	2	0	1	0	0
n_4	0	0	0	1	1	2	3
n_3	4	6	8	5	7	6	7
n_2	6	3	0	4	1	2	0

Při odvozování Grüblerova – Čebyševova vztahu jsme předpokládali, že kinematické dvojice jsou vesměs rotační. Stane-li se osa rotace úběžnou, přejde v relativním pohybu rotační pohyb na posuvný. Pro ***R*** kinematických dvojic rotačních a ***P*** posuvných je ***j = R + P*** a Grüblerova – Čebyševova závislost (1.8) má tvar

$$3n - 2(R + P) - 4 = 0 \tag{1.20}$$

Literatura:

1. CHARVÁT, J.: Teorie mechanismů. Vybrané stati. /Skripta VŠST/. Liberec, VŠST 1980.
2. LUCK, K. - MODLER, H.: Getriebetechnik - Analyse, Synthese, Optimierung. Berlin, Akademie Verlag 1990.
3. CHARVÁT, J.: Teorie kloubových mechanismů. Úřad pro patenty a vynálezy, Praha 1972.
4. CHARVÁT, J. : Syntéza mechanismů. /skriptaVŠST/ Liberec 1966